INDUCCIÓN FILOSÓFICA - INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Clara Helena Sánchez B.
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional, Bogotá.

Inducción filosófica.

Dependiendo del auditorio la palabra **Inducción** será entendida de una manera u otra. Si el público presente fuera mayoritariamente de filósofos estaría pensando en el **Problema de Inducción**, formulado por Bertrand Russell en su célebre libro *Los Problemas de la Filosofía* (1912)[1] de la siguiente manera:

a) Cuando una cosa de una cierta especie, A, se ha hallado con frecuencia asociada con otra cosa de una especie determinada, B, y no se ha hallado jamás disociada de la cosa de la especie B, cuanto mayor sea el número de casos en que A y B se hayan hallado asociados, mayor será la probabilidad de que se hallen asociados en un nuevo caso en el cual sepamos que una de ellas se halla presente.

b) En las mismas circunstancias, un número suficiente de casos de asociación convertirá la probabilidad de la nueva asociación en una certeza y hará que se aproxime de un modo indefinido a la certeza.

Una enunciación más precisa (¿matemática?) se encuentra en Edwards[2] reformulando la de Russell:

1. Suponiendo que tenemos n casos positivos de un fenómeno observados en circunstancias muy variadas (donde n es un entero grande) y que no hemos observado un solo caso negativo, ¿tenemos alguna razón para suponer que el caso $n+1$ será positivo?

[1] Russell Bertrand, Los problemas de la filosofía, Nueva Colección Labor, 1973. Pág. 64.

[2] Edwards Paul *Las dudas de Russell* acerca de la inducción. En La justificación del razonamiento inductivo. Swinburne Richard y otros. Alianza editorial, 1976. Pág. 37

2. ¿Hay algún número n de casos positivos observados de un fenómeno que proporcione elementos de juicio para afirmar que el caso $n+1$ también será positivo?

Y más adelante Edwards dice:

> Russell afirma que a menos que apelemos a un principio no empírico que llama **"Principio de inducción"** las dos preguntas deben ser contestadas de manera negativa. "Aquellos que hicieron hincapié en el alcance de la inducción deseaban mantener que toda lógica es empírica, y por lo tanto no se podía esperar que se dieran cuenta de que la propia inducción, su querida inducción, requería un principio lógico que obviamente, no se podía probar inductivamente, y por ello debería ser a priori, si es que podía ser conocido." "Debemos aceptar el principio de inducción con base en su evidencia intrínseca o renunciar a toda justificación de nuestras expectativas del futuro."[3]

Russell con la última frase se está refiriendo a afirmaciones como las siguientes, el sol saldrá mañana o todos los cuervos son negros. Hasta ahora el sol ha salido todos los días y todos los cuervos vistos son negros.

El problema de la inducción es uno de los problemas abiertos de la filosofía, que involucra a las ciencias naturales, hay una pregunta válida: ¿Qué justifica una ley de la naturaleza? La investigación en ciencia comienza con la observación de fenómenos, y cuando se encuentra una regularidad, se formula una ley, una teoría, la cual debe ser verificada. Basta un caso que niegue la conjetura para que la ley no valga. Igual sucede en matemáticas, con un contraejemplo se demuestra que una cierta afirmación no vale.

Surge de manera obvia la siguiente pregunta: ¿Cuántos experimentos son necesarios para poder formular una ley? ¿Cuántas ratificaciones se requieren para confirmarla? ¿Qué tan seguras son las conclusiones inductivas? ¿Qué tan válidos son los argumentos inductivos? La última es una cuestión que concierne a la lógica. ¿Se puede hablar de argumentos inductivos válidos, esto es, si las premisas son ciertas, la conclusión **necesariamente** es cierta? Naturalmente que **no**. A lo más se puede afirmar que la conclusión es *probablemente* cierta.

[3] Edwards , Ob. Cit. Pág. 38

Para comprender mejor el problema de la inducción es interesante el ejemplo del propio Russell: un granjero compra un pollo y lo alimenta todos los días, el animal cada vez que ve a su amo asociará con que le va a proveer el alimento. Así será hasta el día en que le tuerce el pescuezo para comérselo. Los filósofos ante este problema tienen ejemplos más "científicos"; la misma ley de la gravitación de Newton es cuestionada y también lo son las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas. Veamos este caso:

> ¿Hay alguna razón para suponer que los cuerpos de las personas que se lanzaron de las Torres Gemelas el famoso 11 de septiembre se moverían en dirección a la calle, y no, por ejemplo en dirección al cielo o en un plano horizontal?[4]

El sentido común esperaría que los cuerpos se estrellen contra el piso, como evidentemente sucedió. La **inducción por generalización**, sugiere Edwards, es aceptada por el sentido común.

El problema de la inducción, o su solución, tiene dos aspectos: Uno lógico y otro epistemológico. Al primero le compete establecer reglas para la inferencia inductiva comparables con las reglas de inferencia deductiva y al segundo justificar la inferencia inductiva, esto es, explicar por qué este tipo de razonamiento es racional. A estos dos problemas dedica Popper su obra *Los dos problemas fundamentales de la filosofía*,[5] lectura recomendada para quienes deseen profundizar en el tema.

David Hume en 1739 en su trabajo *Investigación acerca del entendimiento humano*, planteó el segundo aspecto. El argumento de Hume parece mostrar que las conclusiones inductivas jamás están justificadas. Esto es, no producen conocimiento. Y si esto es así, ¿cómo se pueden formular las leyes naturales que están basadas en la experiencia? Mucha cabeza le han echado los filósofos para poder obtener una respuesta. De alguna manera este problema es equivalente a preguntarnos si podemos tener conocimiento de nuestro mundo exterior.

El lógico, que se preocupa por el primer aspecto, debe responder a la pregunta: ¿qué reglas garantizan la **validez** de un argumento inductivo, y particularmente ¿qué garantiza la validez de un argumento inductivo en el cual la conclusión se saca por generalización de unos cuantos casos particulares?

[4]Adaptado de un ejemplo de Edwards. Ob. Cit. Pág. 39

[5]Popper Karl R. Los dos problemas fundamentales de la filosofía. Tecnos, 1980.

La respuesta de los lógicos la conocemos: existen dos grandes tipos de argumentos: deductivos e inductivos. Los deductivos son aquellos en que la verdad de la conclusión es consecuencia necesaria de la verdad de las premisas. De alguna manera la conclusión está contenida en las premisas.

Un argumento inductivo no se califica de válido o inválido. Se califica de fuerte, o débil. Es fuerte cuando las premisas ofrecen una buena evidencia para sustentar la conclusión. A lo más el argumento hace que su conclusión sea probable, nunca cierta, no importa que tanta evidencia se haya presentado. Un buen argumento inductivo perfectamente puede tener todas sus premisas verdadera y sin embargo tener una conclusión falsa. Pero si no aceptamos los argumentos inductivos la misma vida sería imposible. ¿Qué me garantiza que el pan que compro todos los días en la panadería no va a resultar envenenado mañana? ¿Qué evidencia teníamos los colombianos para pensar que el actual ministro de defensa sería mujer? Ninguna! Del hecho de que ninguna mujer hasta el momento haya sido presidente de la República de Colombia, no podemos inferir que el próximo presidente tampoco lo será.

Inducción matemática.

Si estamos entre matemáticos, la palabra inducción nos sugiere el Principio de Inducción Matemática: Si una propiedad vale para 0 y si siempre que la propiedad vale para un número (natural) vale para su sucesor, entonces la propiedad vale para todos los números (naturales). Este famoso principio se hizo especialmente conocido como uno de los cinco postulados de Peano propuestos en su obra *Los principios de la aritmética, presentados por un nuevo método (1899)* para axiomatizar la aritmética; quiero enfatizar, sin embargo, que fue realmente enunciado por primera vez por Dedekind con el nombre de *inducción completa en su libro ¿Qué son y para qué sirven los números?* (1888) en el cual no solo propone su teoría sobre los números naturales sino su definición de número real por medio de cortaduras.

Para algunos autores, Peter Sauber (internet) por ejemplo,

> La *Inducción matemática* es un nombre desafortunado pues es definitivamente una forma de deducción. Sin embargo, tiene ciertas similaridades con la inducción las cuales muy posiblemente inspiraron su nombre. Es una inducción en el sentido en que generaliza a toda una clase a partir de unos pocos ejemplos. Es más, usual-

> mente la muestra está conformada por un caso, y la clase total es infinita! La inducción matemática es deductiva, porque la muestra más una regla acerca de los casos no examinados realmente da información sobre todo elemento de la clase. Así la conclusión de una inducción matemática no contiene más información que la que hay en las premisas. La inducción matemática por lo tanto concluye con certeza deductiva.

¿Pero, cómo una inducción puede ser una deducción? En este encuentro varias charlas se han dedicado a las diversas definiciones de número natural que se han dado en la historia. Son teorías que intentan resolver la pregunta **¿qué es un número natural**? La más antigua que conocemos es la que se encuentra en el libro VI de los Elementos de Euclides: *un número es una multiplicidad de unidades*. Con esa definición que excluye al 1 como número se pueden demostrar muchas propiedades de los números naturales. Pero otras, relativamente sencillas, que se **ven**, como en los casos que voy a mostrar, NO. Sin embargo, creo que para los griegos esas regularidades observadas eran *verdades absolutas* obtenidas a partir de una generalización de la experiencia. Hoy las demostramos rigurosamente con el principio de inducción matemática y aceptamos que la matemática está desligada de toda experiencia empírica!

Primer ejemplo.

•	•	•	•	•		• • •	• • • •	• • • • •
	• •	• •	• •	• •		• • •	• • • •	• • • • •
		• • •	• • •	• • •			• • • •	• • • • •
			• • • •	• • • •				• • • • •
				• • • • •				
1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5		$\frac{2\times3}{2}$	$\frac{3\times4}{2}$	$\frac{4\times5}{2}$
1	3	6	10	15		3	6	10
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)		(b)	(c)	(d)

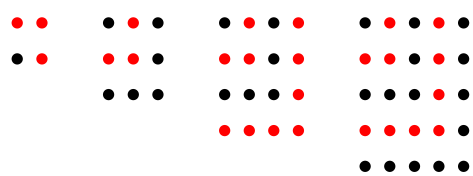
Los números obtenidos como se observa en la progresión anterior se llaman **triangulares** y como vemos se pueden obtener de dos maneras diferentes.

Esas igualdades se pueden generalizar hoy con la fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Segundo ejemplo.

Los números que hoy conocemos como **cuadrados** recibieron su nombre en la época de los pitagóricos justamente porque se podían distribuir, como si fueran colecciones de puntos, en forma de cuadrado. Y esa progresión de cuadrados se obtiene sumando los números impares sucesivos. Veamos:



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

(a) $1 + 3 = 4 = 2 \times 2$
(a) $1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$
(c) $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$
(d) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 \times 5$

(n) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + n = n \times n$

En el siglo XIX en el proceso de rigorización del análisis primero se resolvió la pregunta ¿qué es un número irracional? y por último se respondió ¿que es un número natural? Frege-Cantor responden que son clases de equivalencia de conjuntos y Kronecker se va al extremo de afirmar que Dios nos dio los números naturales y el resto es obra del hombre, con lo cual se "sale por la tangente" ante la pregunta. La primera definición es "constructiva" aunque problemática, porque la teoría de conjuntos quedó cuestionada con las famosas paradojas. Otra manera de resolver el problema es axiomáticamente, es la más conocida y usada. Pero igualmente Russell cuestiona los postulados de Peano en su obra **Introducción a la Filosofía matemática**, pues indica que son axiomas que valen para cualquier progresión geométrica o aritmética. Y se acoge a la definición de Frege: *Un número es cualquier cosa que sea el número de una clase*. En teoría axiomática de conjuntos *un número natural es un elemento del mínimo conjunto inductivo*, conjunto al que se le da el nombre de conjunto de los números naturales; por inductivo se entiende un conjunto S al que pertenece 0 y tal que si n pertenece a S, $n + 1$ también pertenece. Con esta definición lo que se está aceptando es que el principio de inducción matemática es inherente al concepto de número natural.

Como bien sabemos para probar una proposición por inducción procedemos como sigue: Mostramos que vale para 0, (o 1 o un determinado número). Luego suponemos que si es cierto para un número n mayor que 0 (o 1 o un determinado número), entonces probamos que vale para $n+1$. Entonces concluimos que vale para todos los números mayores que 0 (o 1 o un determinado número).

¿Por qué podemos afirmar que la proposición es verdadera para números muy grandes? Mejor aún ¿por qué podemos afirmar que vale para todos los números naturales? Bien, es verdadera para cero. Y, por la segunda condición, si es verdadera para 0 lo es para 1, luego por Modus Ponens es verdadera para 1. Así por un razonamiento idéntico es verdadera para 2. Y así sucesivamente. Estas tres palabras "y así sucesivamente" cargan un gran peso, cargan con el peso de garantizar la verdad de una propiedad para un conjunto infinito.

Rara vez cuestionamos el principio de inducción matemática; simplemente lo aplicamos cuando lo necesitamos. ¿Aceptan todos los matemáticos el principio? Y ¿si lo aceptan cuáles son sus razones?

Epstein[6] responde de la siguiente manera:

1. Los platonistas dicen que este método es válido para los objetos abstractos llamados números naturales. No es un método de generación, sino simplemente la estructura de los números la que es invocada, una estructura que nuestra mente tiene para percibir estos objetos. [Esto es, nacemos con ese software]

2. Los intuicionistas dicen que el método de prueba es válido debido a nuestra intuición trascendental de la naturaleza de los números naturales. [O sea, nacimos con un software, aunque no es el mismo de los platonistas.]

3. El matemático constructivo dice que el método es válido, porque *generar* un número o prueba no significa generarlo físicamente sino generarlo en la teoría. [¡En nuestra mente! ¿Será que generamos lo mismo?]

4. Los ultraconstructivistas dicen que este método de prueba no es válido. Pues, grandes números como $10^{10^{10}}$, no pueden ser generados a partir

[6]Richard L. Epstein Five ways of saying "Therefore", Wadsworth, 2002. Pág. 142.

> de 1 añadiendo 1, con una serie de pruebas con Modus Ponens. Efectivamente tenemos que, si la afirmación es verdadera para $10^{10^{10}}$, es verdadera para $10^{10^{10}} + 1$, por MP. Pero no hay ninguna razón para aceptar que vale para $10^{10^{10}}$, pues $10^{10^{10}}$ actúa como una notación para el infinito.

Así, dice Epstein, dependiendo de la filosofía a la que uno se adscriba la inducción en matemáticas es una prueba o exactamente lo que su nombre sugiere: una generalización de instancias.
Morris Kline en *Matemáticas y el mundo físico*[7] dice:

> El razonamiento matemático con frecuencia es comúnmente visto como diferente y algunas veces como superior al razonamiento que otros estudios utilizan. La gente está acostumbrada a describir el razonamiento matemático como cierto, preciso y exacto. Es realmente el caso que el matemático usa un extraño ramo del razonamiento? Tiene él conocimiento de un proceso secreto que garantice sus resultados donde otros menos informados o menos dotados tienden a enredarse? Así que, si existe, qué es lo peculiar del razonamiento de los matemáticos?
>
> Puede que al matemático le guste ser colocado en un pedestal, para ser elogiado, y mirado como un soberbio razonador entre los hombres, pero si es sincero debe admitir que el no conoce ningún secreto de razonamiento ni posee un poder especial que no esté disponible al resto de los seres humanos. Sin embargo, la matemática ha sido más exitosa que otras ramas del conocimiento en su empresa de erigir una confiable y duradera estructura de pensamiento. Cómo puede suceder esto? La respuesta es que la matemática restringe sus métodos de razonamiento más que otras áreas de investigación.
>
> Hay muchas maneras de sacar conclusiones disponibles para los seres humanos. De éstas las más usadas son la analogía, la inducción y la deducción.

[7] Morris Kline, Mathematics and the Physical World, Dover Pub., 1959. Pág. 14.

Conclusiones.

Para concluir, quisiera dejar algunas preguntas de reflexión a los presentes:

1. ¿Qué tiene la matemática que la hace inmune al Problema de la Inducción?
2. ¿Con qué tipo de objetos trabajamos los matemáticos para que las objeciones que se hacen a los razonamientos inductivos no nos afecten?
3. ¿Las verdades matemáticas están dadas, sólo hay que demostrarlas?

Lakatos en su libro *Matemáticas, ciencia y epistemología en capítulo titulado Regresión infinita y fundamentos de la matemática*,[8] en el cual aborda el problema de la inducción dice:

> El objeto de mi contribución consiste en mostrar que la filosofía matemática moderna está profundamente inmersa en la epistemología general y que solo en este contexto puede ser comprendida.

El mío es sembrar algunas inquietudes entre ustedes, algunas dudas sobre las certezas y métodos matemáticos, para con Lakatos y Kline no sentirnos tan diferentes de los otros y podernos comunicar mejor con ellos en aras de un mejor trabajo científico interdisciplinario y especialmente un mejor desempeño docente.

Referencias

[1] Richard L. Epstein, *Five ways of saying "therefore"*. Wadsworth, 2002.

[2] Morris Kline, *Mathematics and the Physical World.* Dover Pub. 1959.

[3] Peter Sauber, *Mathematical Induction.* Internet.

[4] Karl Popper, *Los problemas fundamentales de la Epistemología.* Tecnos, 1998.

[5] Howard Kahane, *Logic and Philosophy.* Wadsworth, 1986.

[8] Imre Lakatos, Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza, 1981. Pág. 16

[6] Bertrand Russell, *Los problemas de la filosofía.* Nueva Colección Labor, 1973.

[7] Imre Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza, 1981.

[8] Max Black y otros, *La justificación del razonamiento inductivo.* Alianza, 1974.

[9] Richard Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?,* Alianza, 1998.

[10] Philip Morrison y otros, *Potencias de Diez.* Editorial Labor, 1984.